Lec 19 再论函数连续性及无穷小 (大) 的比较

19.1 函数极限的四条性质

命题 19.1 (函数极限的四性)

1. 唯一性.$f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则极限值唯一.
2. 局部有界性.$f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有界.
3. 保号性.$f(x)$ 在 x_0 处有极限, 且极限值大于 (小于) 零, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内大于 (小于) 零.
4. 保序性.$f(x) \geqslant g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

证明 唯一性:

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2$. 若 $A_1 > A_2$, 则 $\varepsilon = \dfrac{A_1 - A_2}{2} > 0$, 则 $\exists\delta_1 > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon$; 又 $\exists\delta_2 > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |A_1 - A_2| < \varepsilon$, 矛盾.

命题 19.2 (函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的四个充要条件)

1. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
2. $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$,i.e. $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续;
3. $f(x) = f(x_0) + \alpha(x), \alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$;
4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, 其中 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

证明

3 $\Rightarrow$ 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 令 $\alpha(x) = f(x) - f(x_0)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, 故 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$, 故 $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x_0) + \alpha(x)) = f(x_0) + \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = f(x_0)$, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

4 $x \to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0, f(x) \to f(x_0) \Leftrightarrow \Delta y \to 0$, 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

19.2 几个常用的记号

$\delta > 0$ 为常数, 设 $\alpha(x) \to 0(\infty), \beta(x) \to 0(\infty), x \to x_0$.

定义 19.1

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $o(g(x))$，记作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$。

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\exists M, \dfrac{f(x)}{g(x)}\le M$ 在 x_0 的去心邻域上成立，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $O(g(x))$，记作 $f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$。♣

1. 点 x_0 的 δ 邻域:$U(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$;
2. 点 x_0 的去心 δ 邻域:$U^*(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}\backslash\{x_0\}$;
3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$; 表示 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 或者说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷大;
4. 若 $\exists M>0, s.t. |\alpha(x)|\le M|\beta(x)|, \forall x\in U^*(x_0,\delta)$, 则记为 $\alpha(x)=O(\beta(x))$;

   注 编者: 这里的比如 $o(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=0\}$, 而 $O(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\exists M>0,\exists\delta>0,\forall x\in U^*(x_0,\delta)\Rightarrow |f(x)|\le M|x|\}$. 也就是说,$x^2=o(x), x\to 0$ 表示的实际是 $x^2\in o(x)$.

例 19.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\alpha\ne 0$, 则 $\alpha(x)=O(\beta(x)), x\in U^*(x_0,\delta)$. 此时称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小 (大), 且 $\alpha(x)\sim\alpha\beta(x), x\to x_0$.

例 19.2 设 $a_n=\ln n, b_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, c_n=n, d_n=\sqrt[n]{n!}$, 则 $n\to\infty$ 时,$a_n,b_n,c_n,d_n\to\infty$, 且 $a_n=o(b_n), b_n=o(c_n), c_n=o(d_n)$.

例 19.3 当 $x\to x_0$ 时候, 证明:

1. $o(\alpha(x))\cdot o(\beta(x))=o(\alpha(x)\cdot\beta(x))$;
2. $O(\alpha(x))\cdot O(\beta(x))=O(\alpha(x)\cdot\beta(x))$;
3. $O(o(\alpha(x)))=o(\alpha(x))$;
4. $o(O(\alpha(x)))=o(\alpha(x))$.

注 编者: 这里的 $o(\alpha(x))o(\beta(x))$ 表示的是集合相乘, 即 $o(\alpha(x))o(\beta(x))=\{fg|f\in o(\alpha(x)), g\in o(\beta(x))\}$.

o, O 仅表示相对的大小关系, 本身不表示绝对的高阶 (低阶) 无穷大 (小). $o(f)$ 的含义实际是所有 f 的无穷小量组成的集合, 因此前面的等号实际含义是 $\in$. 我们试图用阶定量的表示这种无穷小的比较关系, 但是不是所有无穷小都可以用整数阶来表示.

19.3 间断点

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都连续, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a), f(b-0)=f(b)$.

(x) 在 $[a,+\infty)$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 处间断, 则

1. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;
2. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且不相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;
3. $f(x_0-0)=\infty, f(x_0+0)=\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;
4. $f(x_0-0)=-\infty, f(x_0+0)$ 至少有一个不存在, 且 $f(x_0-0)\neq\infty, f(x_0+0)\neq\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的其它间断点.

19.4 几个特别地非初等函数的连续性

1. 狄利克雷 (Dirichlet) 函数:$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$ 则
   (a). 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且是周期函数, 任意一个正有理数都是 $D(x)$ 的周期, 从而 $D(x)$ 不存在最小正周期;
   (b). $D(x)$ 在任意一点都不连续, 即 $D(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处间断;
   (c). $g(x)=xD(x), x\in\mathbb{R}$, 则 $g(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续.

   证明
   (a). $|D(x)|\leqslant 1, \forall x\in\mathbb{R}$, 故 $D(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 又 $\forall x\in\mathbb{R}, q_0\in\mathbb{Q}, D(x+q_0)=D(x)$, 故 $D(x)$ 是周期函数.
   (b). 任给一点 x_0，我们可以取到一个由理数组成的单调增（减）数列 $\{a_n\}$ 收敛到 x_0，也可以找到无理数组成的单调增（减）数列 $\{b_n\}$ 收敛到 x_0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}D(a_n)=1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}D(b_n)=0$。所以函数在任何一点的左右极限都不存在，都是第二类间断点。
   (c). $g(0)=0, \lim\limits_{x\to0}|g(x)|\leqslant\lim\limits_{x\to0}|x|=0$, 故 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 若 $x\neq0$,$g(x)$ 在 x 处连续, 则 $D(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 在 x 处连续, 矛盾, 故 $g(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续.
2. Riemann 函数:$R(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in\mathbb{Z},q\neq0,(p,q)=1);\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$ 则
   (a). $R(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义, 有界且周期为 1;
   (b). $R(x)$ 在任意一点 x_0 处极限为 0,i.e. $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0, \forall x_0\in\mathbb{R}$;
   (c). $R(x)$ 在任一无理点处都连续, 在有理点处都为可去间断点.
3. $\xi(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^A}, x\in(1,+\infty)$,
   $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处连续, 处处可微. 且 $\xi(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$,i.e. $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处具有任意阶连续的导函数.
4. $\Gamma(x)\triangleq\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t, x>0$,
   $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 处处可微, 且 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

✍ 作业 ex2.1:4,5,6(2)(4)(5),7,8,17(1)(3)(4).